

קורס מבוא למתמטיקה לכלכליים

פרק 18 - חשבון אינטגרלי - חוזה על מושג האינטגרל וaintegrals בשיטת
הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1	. אינטגרלים מיידיים
4	. מציאת פונקציה קדומה
6	. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) \text{ פתרה על ידי הכלל :}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

$$\left(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + C \right) \text{ פתרה על ידי הכלל :}$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

$$\left(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c \right) \text{ פתרה על ידי הכלל :}$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ פתרה על ידי הכלל :}$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ פתרה על ידי הכלל :}$$

$$(31) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{x^2}{1-x^2} dx$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיעור המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 6x + 6$.

שיעור הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 ,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

השיעור לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

8) נתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$ המקיים $f(0) = 0$ וכן לכל x ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
- ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.
- ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
- ה. תהיו $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
חשבו את הנגזרת $'(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8) רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודות פיתול אחת $(0,0)$.

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (6)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (5)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x + 1} dx \quad (4)$$

$$\int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (11)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 4} dx \quad (10)$$

תשובות סופיות

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad (2)$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad (1)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (6)$$

$$e^{x^2} + c \quad (5)$$

$$e^2 \ln|e^x + 1| + c \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (9)$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad (7)$$

$$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (11)$$

$$\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (10)$$